解答例

(I) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z-3+1}-\dfrac{1}{z-3+2}$ だから

① $0<|z-3|<1$ のとき

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\{-(z-3)\}^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{-\frac{1}{2}(z-3)\right\}^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}(z-3)^n$$

② $1<|z-3|<2$ のとき

$$f(z)=\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z-3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z-3)^n$$

③ $2<|z-3|$ のとき

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}-\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n-1}-(-2)^{n-1}\right\}\frac{1}{(z-3)^n}$$

(II) 特異点は $z=\frac{\pi}{2}+n\pi-1\equiv z_n$ (nは整数).

z_nの周りで

$$f(z)=\tan\left(z-z_n+\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\tan\left(z-z_n+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\cos(z-z_n)}{\sin(z-z_n)}$$

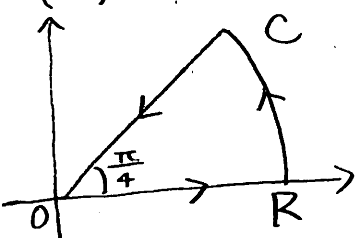
$$=-\frac{1-\frac{1}{2}(z-z_n)^2+\cdots}{(z-z_n)-\frac{1}{3!}(z-z_n)^3+\cdots}=-\frac{1}{z-z_n}\left\{1+\frac{1}{3!}(z-z_n)^2-\cdots\right\}\left\{1-\frac{1}{2}(z-z_n)^2+\cdots\right\}$$

なので z_nは1位の極である. また, その留数は-1である.

Cの内部にある極は $\frac{\pi}{2}-1$, $-\frac{\pi}{2}-1$ のみであるから

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\mathrm{Res}\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)\right]=-4\pi i$$

(III)



図のような積分経路Cに沿ってe^{-z^2}を積分することを考える. e^{-z^2}はCの内部で正則だから

$$\int_C e^{-z^2}dz=0.$$

一方,

$$\int_C e^{-z^2}dz=\int_0^R e^{-z^2}dz+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2e^{2i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta+\int_R^0 e^{-\frac{(1+i)^2}{2}t^2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}dt.$$

省略可

ここで第1項の積分は$R\to\infty$で次のように求められる:

$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$とおくと

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\,e^{-(x^2+y^2)}=\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr\int_0^{2\pi}d\theta\overset{t=r^2}{=}2\pi\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{dt}{2}=\pi.$$

よって $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

また,

$$|(\text{第2項})|\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2\cos 2\theta}R\,d\theta\overset{2\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-R^2\sin\varphi}\left(-\frac{d\varphi}{2}\right)\cdot R$$

$$=\frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R^2\sin\varphi}d\varphi\le\frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R^2\frac{2\varphi}{\pi}}d\varphi=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})\xrightarrow[R\to\infty]{}0,$$

$$(\text{第3項})=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-it^2}dt=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R(\cos t^2-i\sin t^2)dt$$ だから

$$\int_0^{\infty}(\cos t^2-i\sin t^2)dt=\frac{\sqrt{2}}{1+i}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i).\quad\therefore\int_0^{\infty}\cos x^2dx=\int_0^{\infty}\sin x^2dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

第4回 (5) (ii)

特異点は $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ である．その周りで

$$\frac{z}{\sin z} = \frac{z - n\pi + n\pi}{\sin(z - n\pi + n\pi)} = (-1)^n \frac{z - n\pi + n\pi}{\sin(z - n\pi)}$$

$$= (-1)^n \frac{z - n\pi + n\pi}{z - n\pi - \frac{1}{3!}(z - n\pi)^3 + \cdots}$$

$$= (-1)^n \left(1 + \frac{n\pi}{z - n\pi}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3!}(z - n\pi)^2 + \cdots}$$

$$= (-1)^n \left(1 + \frac{n\pi}{z - n\pi}\right) \left\{1 + \frac{1}{3!}(z - n\pi)^2 - \cdots\right\}$$

と展開されるから

$z = 0$ は除去可能特異点，

$z = n\pi$ $(n \neq 0)$ は 1 位の極．

別解：特異点は $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ である．

$n = 0$ のとき $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$ だから

$z = 0$ は除去可能特異点．

$n \neq 0$ のとき $\dfrac{z}{\sin z}$ は $z \to n\pi$ で発散し，かつ

$$\lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) \frac{z}{\sin z} = n\pi \lim_{z \to n\pi} \frac{z - n\pi}{\sin(z - n\pi + n\pi)}$$

$$= n\pi \lim_{z \to n\pi} \frac{z - n\pi}{\sin(z - n\pi)} (-1)^n$$

$$= n\pi (-1)^n$$

なので $z = n\pi$ $(n \neq 0)$ は 1 位の極．