解答例

(I) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ として

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2y$, $-\frac{\partial v}{\partial x}=-2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x$ であるから

Cauchy-Riemann の関係式が満たされるのは $x=-2$, $y=-4$ のときだけである. 従って $f(z)$ は $z=-2-4i$ でのみ微分可能で, 他の点では微分可能でなく, また, あらゆる点で正則でない.

別解: $$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\frac{(x+\varepsilon)^2+(x+\varepsilon)(y+\varepsilon')+i\{(y+\varepsilon')^2+2(x+\varepsilon)\}-(x^2+xy+i(y^2+2x))}{\varepsilon+i\varepsilon'}$$

$$=\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\frac{2\varepsilon x+\varepsilon' x+\varepsilon y+2i(\varepsilon' y+\varepsilon)}{\varepsilon+i\varepsilon'}=C \text{ とおく.}$$

C が $\varepsilon, \varepsilon'$ のとり方に依らず存在するためには

$2\varepsilon x+\varepsilon' x+\varepsilon y+2i(\varepsilon' y+\varepsilon)=C(\varepsilon+i\varepsilon')$

$\iff \varepsilon(2x+y+2i-C)+\varepsilon'(x+2iy-iC)=0$

が $\varepsilon, \varepsilon'$ に関わらず成立しなくてはならない. 即ち

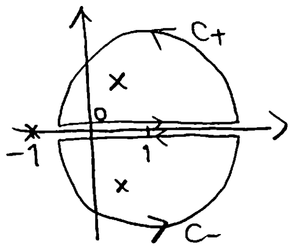
$2x+y+2i-C=x+2iy-iC=0$.

これは $x=-2$, $y=-4$ のときだけ成立. 以下省略.

(II) -1 の3乗根 -1, $e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ と $z=1$ との距離はそれぞれ 2, 1 である.

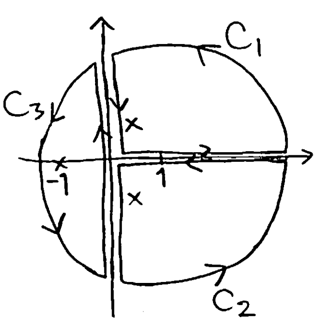
$0<R<1$ のとき $\frac{1}{z^3+1}$ は C の内部で正則だから $\int_C \frac{1}{z^3+1}dz=0$.

$1<R<2$ のとき 左図のような経路 $C_\pm$ に分けて



$$\int_C \frac{1}{z^3+1}dz=\int_{C_+}\frac{1}{z-e^{\frac{\pi}{3}i}}\frac{1}{(z-e^{-\frac{\pi}{3}i})(z+1)}dz$$
$$+\int_{C_-}\frac{1}{z-e^{-\frac{\pi}{3}i}}\frac{1}{(z-e^{\frac{\pi}{3}i})(z+1)}dz$$
$$=2\pi i\left[\frac{1}{\sqrt{3}i(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}+\frac{1}{-\sqrt{3}i(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}\right]$$
$$=-\frac{2}{3}\pi i$$

$2<R$ のとき 経路を左図のように3分割して, それぞれの経路について Cauchy の積分公式を使うと



$$\int_C \frac{1}{z^3+1}dz=-\frac{2}{3}\pi i+2\pi i\frac{1}{(-1-e^{-\frac{\pi}{3}i})(-1-e^{\frac{\pi}{3}i})}$$
$$=-\frac{2}{3}\pi i+2\pi i\cdot\frac{1}{3}=0.$$

(III) $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z')}{z'-z}dz'$ を z で微分すると

$f'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z')}{(z'-z)^2}dz'$ を得る.

ここで $f(z')=\dfrac{e^{z'}}{z'-2}$, $z=0$ の場合を考えると

$$\left(\frac{e^z}{z-2}\right)'\Bigg|_{z=0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{z'}}{z'^2(z'-2)}dz'.$$

よって $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=2\pi i\left[\frac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2}\right]_{z=0}=-\frac{3}{2}\pi i.$

別解: $\dfrac{1}{z^2(z-2)}=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z-2}\right)$,

$e^z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ だから

$$\frac{e^z}{z^2(z-2)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-2}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-1}+\frac{e^z}{4(z-2)}.$$

第3項はCの内部で正則であるから $\displaystyle\int_C\frac{e^z}{4(z-2)}dz=0.$

問題(3)の結果 $\displaystyle\int_C z^n dz=\begin{cases}2\pi i & (n=-1)\\ 0 & (n\neq-1)\end{cases}$

を使うと第1項, 第2項の寄与は

$$\int_C\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-2}dz=-\pi i.$$

$$\int_C\left(-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-1}dz=-\frac{\pi}{2}i.$$

従って $\displaystyle\int_C\frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=-\frac{3\pi}{2}i.$

(Ⅲ) $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-z}dz'$ を z で微分すると

$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{(z'-z)^2}dz'$ を得る.

ここで $f(z') = \frac{e^{z'}}{z'-2}$, $z=0$ の場合を考えると

$$\left(\frac{e^z}{z-2}\right)'\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{z'}}{z'^2(z'-2)}dz'.$$

よって $\int_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz = 2\pi i\left[\frac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2}\right]_{z=0} = -\frac{3}{2}\pi i.$

別解: $\frac{1}{z^2(z-2)} = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z}-\frac{1}{z-2}\right)$,

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ だから

$$\frac{e^z}{z^2(z-2)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-1} + \frac{e^z}{4(z-2)}.$$

第3項はCの内部で正則であるから $\int_C \frac{e^z}{4(z-2)}dz = 0$.

問題(3)の結果 $\int_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (n\neq -1) \end{cases}$

を使うと第1項, 第2項の寄与は

$\int_C \left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-2}dz = -\pi i$.

$\int_C \left(-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-1}dz = -\frac{\pi}{2}i$.

従って $\int_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz = -\frac{3\pi}{2}i$.

解答例

(I) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ として

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2y,\ -\frac{\partial v}{\partial x}=-2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x$ であるから

Cauchy-Riemann の関係式が満たされるのは $x=-2,\ y=-4$ のときだけである。従って $f(z)$ は $z=-2-4i$ でのみ微分可能で, 他の点では微分可能でなく, また, あらゆる点で正則でない.

別解: $\displaystyle\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\frac{(x+\varepsilon)^2+(x+\varepsilon)(y+\varepsilon')+i\{(y+\varepsilon')^2+2(x+\varepsilon)\}-\{x^2+xy+i(y^2+2x)\}}{\varepsilon+i\varepsilon'}$

$\displaystyle=\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\frac{2\varepsilon x+\varepsilon' x+\varepsilon y+2i(\varepsilon' y+\varepsilon)}{\varepsilon+i\varepsilon'}=C$ とおく.

C が ε,ε' のとり方に依らず存在するためには

$2\varepsilon x+\varepsilon' x+\varepsilon y+2i(\varepsilon' y+\varepsilon)=C(\varepsilon+i\varepsilon')$

$\Longleftrightarrow \varepsilon(2x+y+2i-C)+\varepsilon'(x+2iy-iC)=0$

が ε,ε' に関わらず成立しなくてはならない. 即ち

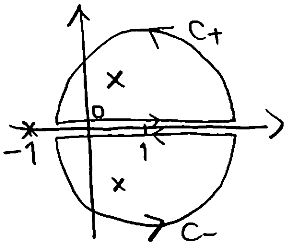
$2x+y+2i-C=x+2iy-iC=0.$

これは $x=-2,\ y=-4$ のときだけ成立. 以下省略.

(II) -1 の3乗根 $-1,\ e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ と $z=1$ との距離はそれぞれ $2,\ 1$ である.

$0<R<1$ のとき $\frac{1}{z^3+1}$ は C の内部で正則だから $\int_C\frac{1}{z^3+1}dz=0$.

$1<R<2$ のとき 左図のような経路 $C_\pm$ に分けて

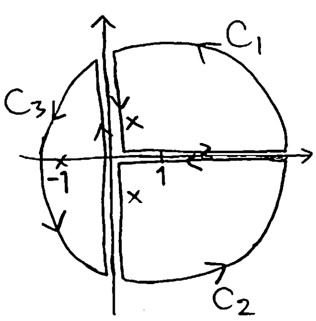


$$\int_C\frac{1}{z^3+1}dz=\int_{C_+}\frac{1}{z-e^{\frac{\pi}{3}i}}\frac{1}{(z-e^{-\frac{\pi}{3}i})(z+1)}dz+\int_{C_-}\frac{1}{z-e^{-\frac{\pi}{3}i}}\frac{1}{(z-e^{\frac{\pi}{3}i})(z+1)}dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{\sqrt{3}i(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}+\frac{1}{-\sqrt{3}i(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}\right]$$

$$=-\frac{2}{3}\pi i$$

$2<R$ のとき 経路を左図のように3分割して, それぞれの経路について Cauchy の積分公式を使うと



$$\int_C\frac{1}{z^3+1}dz=-\frac{2}{3}\pi i+2\pi i\frac{1}{(-1-e^{-\frac{\pi}{3}i})(-1-e^{\frac{\pi}{3}i})}$$

$$=-\frac{2}{3}\pi i+2\pi i\cdot\frac{1}{3}=0.$$